



Prof. Dr. Rupert Frank
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 12 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
28. Januar 2022

Aufgabe 1 (10 Punkte). Zeigen Sie, dass die Funktionen $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Umkehrfunktion des Tangens) und $\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

gleichmäßig stetig sind.

Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Lösung. Beide der angegebenen Funktionen sind differenzierbar mit

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$

Es folgt

$$|\arctan'(x)| \leq 1, \quad |\tanh'(x)| \leq 1 \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für die zweite Ungleichung haben wir die bekannte Tatsache benutzt, dass $\cosh x \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun zum Beweis. Wir kürzen ab $f(x) := \arctan(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon$. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$. Ohne Einschränkung nehmen wir $x < y$ an (Gleichheit ist trivial, wenn $y < x$ vertauschen wir x und y). Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert $\xi \in]x, y[$ mit

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi).$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| |x - y| \stackrel{(1)}{\leq} |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

Also ist $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Der Beweis für $\tanh$ läuft völlig analog (setze $f(x) = \tanh(x)$).

Bemerkung: Allgemein gilt: Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|f'| \leq M$, so ist f gleichmäßig stetig. Die Aussage gilt jedoch nicht für alle Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 2 (10 Punkte). Zeigen Sie: Eine differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall I ist genau dann konvex, wenn ihr Graph oberhalb jeder Tangente liegt, d.h. wenn für jedes $a \in I$ gilt:

$$\forall x \in I: \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Lösung. “ $\Rightarrow$ ”: Angenommen, f ist konvex. Nach Vorlesung ist dann f' monoton wachsend.

Seien $a, x \in I$. Falls $a = x$, so ist nichts zu zeigen. Falls $a < x$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\xi \in]a, x[$ mit

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a).$$

Wegen $f'(\xi) \geq f'(a)$ und $x - a \geq 0$ folgt die behauptete Ungleichung

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a).$$

Der Fall $a > x$ läuft analog.

“ $\Leftarrow$ ”: Angenommen, f erfüllt das Tangentenkriterium. Seien $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$. Setze $a := \lambda x + (1 - \lambda)y$. Zu zeigen ist

$$f(a) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Nach Annahme gilt

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \quad f(y) \geq f(a) + f'(a)(y - a),$$

also

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) &\geq \lambda(f(a) + f'(a)(x - a)) + (1 - \lambda)(f(a) + f'(a)(y - a)) \\ &= f(a) + f'(a)(y - a) + \lambda f'(a)(x - a) - \lambda f'(a)(y - a) \\ &= f(a) + f'(a)[y - a + \lambda(x - y)] \\ &= f(a) + f'(a)[y - \lambda x - (1 - \lambda)y + \lambda(x - y)] \\ &= f(a) + f'(a) \underbrace{[y - \lambda x - y + \lambda y + \lambda x - \lambda y]}_{=0} \\ &= f(a), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. Also ist f konvex. □

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte). In dieser Aufgabe soll das Integral $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$ mittels Riemannsummen berechnet werden.

(i) Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n}$$

für $n \in \mathbb{N}$, indem Sie den Sinus durch die komplexe Exponentialfunktion ausdrücken und die geometrische Summenformel verwenden.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} = 1.$$

und folgern Sie

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = 1.$$

Lösung. (i) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(e^{i\pi/2n} \right)^k - \left(e^{-i\pi/2n} \right)^k \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\pi/2} - 1}{e^{i\pi/2n} - 1} - \frac{e^{-i\pi/2} - 1}{e^{-i\pi/2n} - 1} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{i-1}{e^{i\pi/2n} - 1} + \frac{i+1}{e^{-i\pi/2n} - 1} \right).\end{aligned}$$

(ii) Sei $y_n := i\pi/2n$. Dann folgt mit Aufgabenteil (ii)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} &= -\frac{1}{2} y_n \left(\frac{i-1}{e^{y_n} - 1} + \frac{i+1}{e^{-y_n} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1-i) \frac{y_n}{e^{y_n} - 1} + \frac{1}{2} (1+i) \frac{-y_n}{e^{-y_n} - 1}.\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \text{also auch} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ist somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n} = \frac{1}{2} (1-i) + \frac{1}{2} (1+i) = 1.$$

Andererseits ist die angegebene Summe eine Riemannsumme der Sinusfunktion. In der Tat: Wählen wir $x_k := \pi k/2n$ für $k = 0, \dots, n$, $\xi_k = x_{k-1}$ für $k = 1, \dots, n$ und

$$Z = ((x_k)_{k=0, \dots, n}, (\xi_k)_{k=1, \dots, n}),$$

so gilt für die zugehörige Riemannsumme

$$\begin{aligned}S_Z(\sin) &= \sum_{k=1}^n \sin(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\xi_{k+1}) (x_{k+1} - x_k) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{2n}.\end{aligned}$$

Nach Vorlesung konvergiert diese Summe für $n \rightarrow \infty$ gegen das Integral $\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx$. $\square$

Aufgabe 4 (10 Punkte). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die in $x_0 \in [a, b]$ unstetig und auf $[a, b] \setminus \{x_0\}$ stetig ist. Zeigen Sie: f ist Riemann-integrierbar.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen (mit mehr Aufwand), dass jede beschränkte Funktion mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen Riemann-integrierbar ist.

Lösung. Wir nehmen an $x_0 \in]a, b[$, die Fälle $x = a$ und $x = b$ sind leichter und folgen analog. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen: Es gibt Treppenfunktionen $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f beschränkt ist, existiert $M > 0$ mit $f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Sei $\delta > 0$ mit $\delta < \varepsilon/(12M)$. Da $f|_{[a, x_0 - \delta]}$ Riemann-integrierbar ist, existieren $\varphi_1, \psi_1: [a, x_0 - \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $\varphi_1 \leq f|_{[a, x_0 - \delta]} \leq \psi_1$ und

$$\int_a^{x_0 - \delta} \psi_1(x) dx - \int_a^{x_0 - \delta} \varphi_1(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Analog existieren $\varphi_2, \psi_2: [x_0 + \delta, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit $\varphi_2 \leq f|_{[x_0 + \delta, b]} \leq \psi_2$ und

$$\int_{x_0 + \delta}^b \psi_2(x) dx - \int_{x_0 + \delta}^b \varphi_2(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Definiere nun $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{für } x \in [a, x_0 - \delta], \\ \varphi_2(x) & \text{für } x \in [x_0 + \delta, b], \\ -M & \text{sonst,} \end{cases} \quad \psi(x) := \begin{cases} \psi_1(x) & \text{für } x \in [a, x_0 - \delta], \\ \psi_2(x) & \text{für } x \in [x_0 + \delta, b], \\ M & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind φ, ψ Treppenfunktionen und nach Konstruktion gilt $\varphi \leq f \leq \psi$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx &= \underbrace{\int_a^{x_0 - \delta} \psi_1(x) dx - \int_a^{x_0 - \delta} \varphi_1(x) dx}_{< \varepsilon/3} \\ &+ \underbrace{\int_{x_0 + \delta}^b \psi_2(x) dx - \int_{x_0 + \delta}^b \varphi_2(x) dx}_{< \varepsilon/3} \\ &+ \underbrace{\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \psi_2(x) dx}_{= M(x_0 + \delta - (x_0 - \delta))} - \underbrace{\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi_2(x) dx}_{= (-M) \cdot (x_0 + \delta - (x_0 - \delta))} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 4\delta M < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f Riemann-integrierbar. Für endlich viele Unstetigkeitsstellen geht man genauso vor, für abzählbar viele ist der Beweis wesentlich komplizierter. $\square$